A proposito di geometria: le proposte di MathUp

Convegno Pristem + mateinitaly *Un anno di laboratori, di giochi, di… matematica*
Sessione per la scuola secondaria di primo grado
Bari, 6 ottobre 2018
M. Dedò

Un indice per questo intervento

Obiettivo:
riprendere alcuni temi toccati nell’intervento in plenaria e articolarli con riferimento alla scuola media.

Per esempio: che cosa si intende, nel contesto della scuola media, per:

- usare l’**osservazione della realtà** per recuperare lo *spirito geometrico*;
- aggregare gli argomenti intorno a **poche idee forti** su cui tornare più e più volte (apprendimento a spirale).

Poche idee forti: quali?
(per la geometria nella scuola media)

- La **simmetria**
- La **similitudine**
- La **misura**
- L'**uguaglianza**

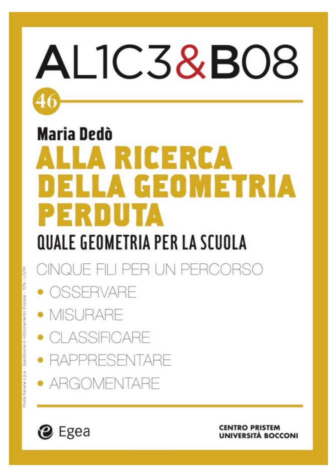
… e a partire da queste idee si possono costruire ponti verso altri argomenti, anche argomenti che tradizionalmente si pensano lontani dalla geometria: la proporzionalità; le frazioni; le espressioni letterali; …

… e anche ponti verso altri segmenti scolastici (**verticalità**).

Poche idee forti: quali?

- La **simmetria**
- La **similitudine**
- La **misura**
- L'**uguaglianza**

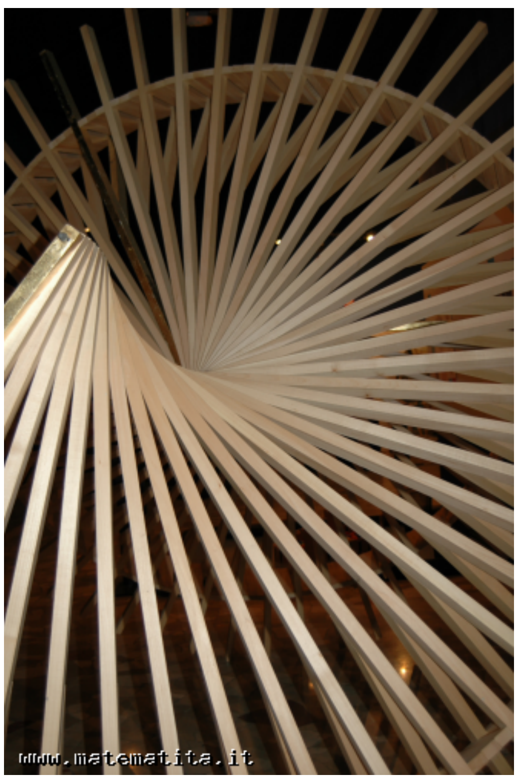
… e si ritrovano anche i cinque **fili** che si erano individuati e proposti come fili conduttori per organizzare l'insegnamento della geometria (in tutto l'arco scolastico preuniversitario):



- **osservare**
- **misurare**
- **classificare**
- **rappresentare**
- **argomentare**

Tornare più e più volte sulle idee forti

I concetti astratti **sono difficili**! Non c'è da stupirsi del fatto che ragionare in astratto costituisca una (grossa!) difficoltà per i ragazzi. L'umanità ha impiegato secoli per arrivare all'astrazione! E non solo in matematica!



Per venire incontro a questa difficoltà **non è utile** anticipare lo studio di capitoli tradizionalmente studiati a livelli scolari superiori; vale piuttosto la pena fermarsi a approfondire e perfezionare i capitoli destinati a questo livello.

Cedric Villani, Charles Torossian "*21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*" (Francia, 2018).

Anticipare: **NO.**

Creare un retroterra informale: **SÌ**

Tornare più e più volte sulle idee forti: i problemi

Le scienze cognitive dicono che bisogna tornare **almeno 5 volte** su un dato concetto per ancorarlo alla memoria, **ma** la maniera efficace per tornarci sopra è **attraverso problemi**, in **contesti differenti**, in cui sia chi apprende a riconoscerne la presenza.

… cioè… **i laboratori**.

Negli interventi del pomeriggio vedremo alcuni esempi.

Indicazioni nazionali e problemi

Per *valutare informazioni*, *confrontare procedimenti*, *prendere decisioni*, *risolvere problemi*, *spiegare il procedimento seguit*o (dai “Traguardi per le competenze”) quello che occorre non sono certo dei capitoli di cosiddetta “logica”, con definizioni e regole da imparare più o meno a memoria, ma piuttosto

tanti, tanti, tanti problemi.

Anche **problemi non standard**;

anche problemi difficili;

anche problemi per i quali non c’è una ricetta prestabilita;

anche problemi per risolvere i quali non se ne viene a capo da soli, ma è necessario confrontarsi con gli altri;

anche problemi in cui si sbaglia; e si impara dai propri **errori**.

*NB. Ci sono **sfasature, anche notevoli,** fra Indicazioni Nazionali e libri di testo. I corsi MathUp sono stati (molto!) più in sintonia con le Indicazioni Nazionali che con i libri di testo.*

Gli indici dei tre anni di corsi MathUp

Corso MathUp di I media
2015-16

- Introduzione
- Problemi
- Statistica
- (Potenze)
- (Piano cartesiano o carta a quadretti?)
- Divisione in **N**
- Decimali e misura
- Angoli e frazioni
- L'uguaglianza
- Geometria
- Conclusioni

Corso MathUp di II media
2016-17

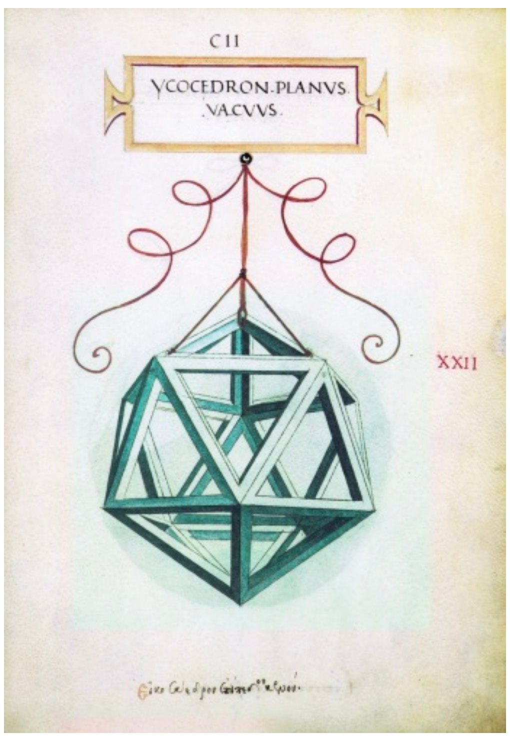
- Introduzione
- Code di aritmetica dalla prima classe
- La forma in gioco
- Similitudine
- Aree e volumi
- Rapporti e proporzionalità
- Rette e curve nel piano cartesiano
- Conclusioni

Corso MathUp di III media
2017-18

- Introduzione
- Problemi
- (Finestra su statistica)
- Probabilità
- Geometria 3d
- (Finestra su isometrie)
- Avvio all'algebra
- Conclusioni

Gli indici dei tre anni di corsi MathUp: come sono nati

Nei corsi MathUp degli ultimi tre anni, una delle prime lezioni illustrava la costruzione di un indice per le videolezioni dell'anno. I riferimenti per costruire questi indici (per quel che riguarda i contenuti) sono stati:

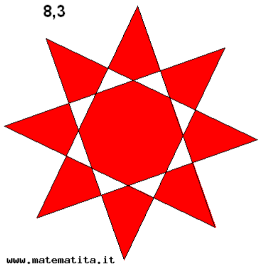


- gli indici di alcuni libri di testo per la classe corrispondente;
- le Indicazioni Nazionali (in particolare per la classe III, alla fine del ciclo).

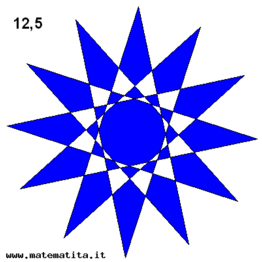
A questi indici (relativi ai contenuti) si sono poi aggiunti alcuni commenti metodologici, a proposito della didattica laboratoriale.

Gli indici MathUp: qualche commento I - 1

Il tema forte, aggregante, è la **divisione**.



A partire dalla divisione si possono mettere in evidenza i **ponti** tra aritmetica e geometria!

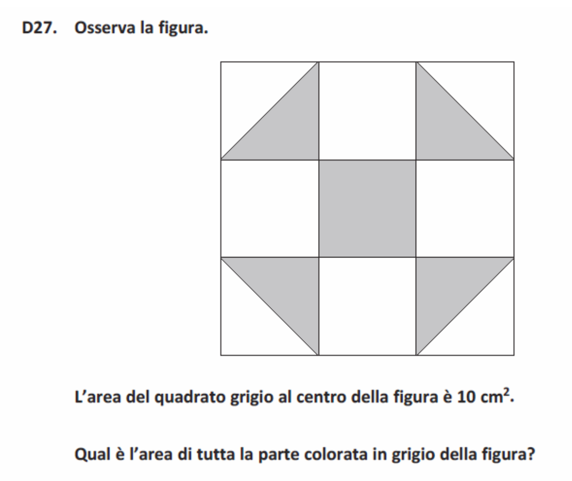


Non ha senso anticipare idee che hanno una collocazione naturale più avanti!

Per la geometria appare:
- il concetto di **uguaglianza;**
- il concetto di **simmetria**.

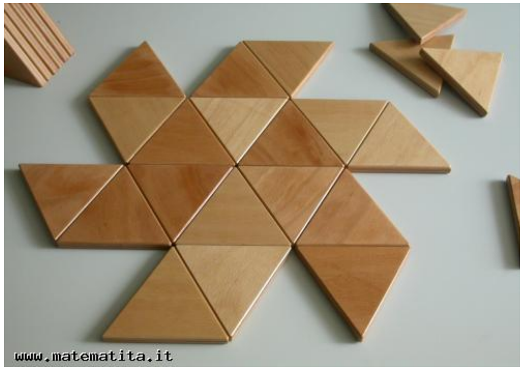
Gli indici MathUp: qualche commento I - 2

Il concetto di **misura** resta in *stand-by*.


D27. Osserva la figura.

L'area del quadrato grigio al centro della figura è 10 cm^2.

Qual è l'area di tutta la parte colorata in grigio della figura?



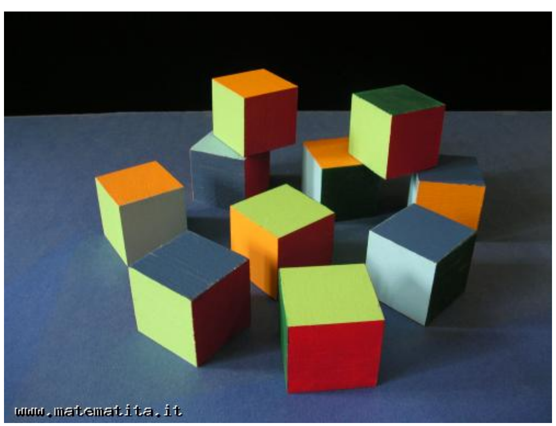
Non disperdiamo però il patrimonio di conoscenze informali acquisite nella scuola primaria! E quindi…

… problemi, problemi, problemi…

propedeutici rispetto a ciò che verrà fatto sistematicamente in seguito e insieme di consolidamento di ciò che già sanno, informalmente, dalla scuola primaria; problemi per cui non servono formule, ma occorre **osservare**, e avere chiaro il **significato di area**.

Gli indici MathUp: qualche commento I - 3

Spuntano **simmetria** e **uguaglianza** come criteri per orientarsi fra le figure che i ragazzi già conoscono dalla scuola primaria (*quando due figure sono uguali*, *quando sono diverse?*)



Cruciale l'**osservazione** della realtà che ci circonda: e non preoccupiamoci se questa inevitabilmente parte dal 3d!

Gli indici MathUp: qualche commento II - 1

II media (2016-17)

- Introduzione
- Code di aritmetica dalla prima classe
- La forma in gioco
- Similitudine
- Aree e volumi
- Rapporti e proporzionalità
- Rette e curve nel piano cartesiano
- Conclusioni

Qui è la **similitudine** l'idea forte aggregante, che si aggancia implicitamente alla **misura** nella lettura e interpretazione delle formule.

*Ma perché non rendere **esplicito** questo legame? Più difficile? Forse, ma insieme anche molto più ricco di **significato**!*

Ritroviamo naturalmente anche **uguaglianza** e **simmetria**, se non altro nel guidare l'**osservazione** della realtà, che resta il punto di partenza.

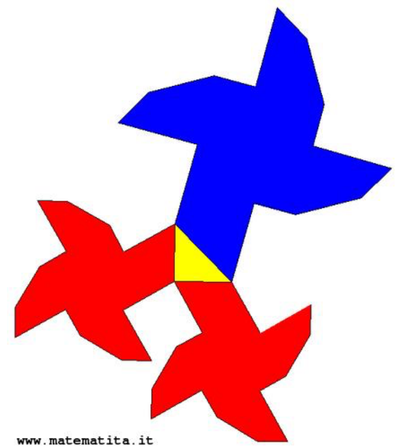
Gli indici MathUp: qualche commento II - 2

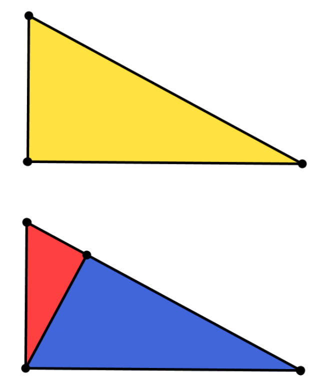
La similitudine negli argomenti di questo anno compare proprio ovunque: nel teorema di Pitagora; nella circonferenza e nel numero π; nella lettura delle formule per aree (e volumi); nella proporzionalità; nell'equazione della retta; …

A scuola e sui libri, usiamo le similitudini ben più delle isometrie: basta pensare alle figure alla lavagna! Ma anche agli enunciati dei "fatti geometrici" raccontati sui libri (*come mai compaiono a volte misure di angoli, ma mai misure di lunghezze?*)

Gli indici MathUp: qualche commento II - 3

È la similitudine che sta alla base del teorema di Pitagora.





È la similitudine che permette di identificare **cerchio e circonferenza** (e sfera); è dal fatto che tutti i cerchi sono fra loro simili che nasce il numero π.

Gli indici MathUp: qualche commento III -1

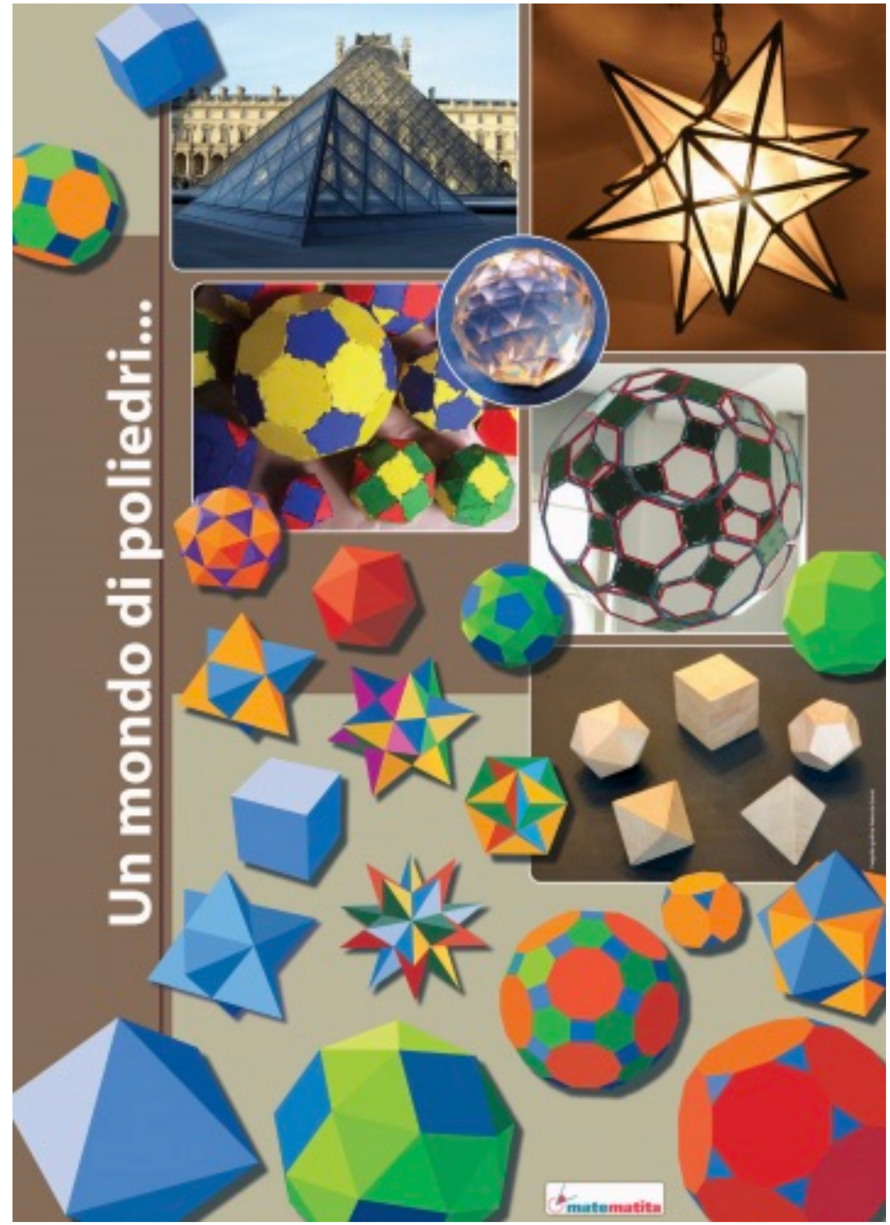
III media (2017-18)
- Introduzione
- Problemi
- Finestra su statistica
- Probabilità
- Geometria 3d
- Finestra su isometrie
- Avvio all'algebra
- Conclusioni

La geometria 3d non nasce in III media, ma trovano qua una sistemazione più organica tutta una serie di *fatti* che negli anni precedenti sono rimasti sul piano della **osservazione**.

Gli indici MathUp: qualche commento III - 2

Cosa richiedono le Indicazioni Nazionali: *Riconosce e denomina le forme (del piano e) dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi.*

Quindi: non un formulario e/o un elenco di nomi e di termini nuovi, ma uno strumento per l'**osservazione** e la **rappresentazione** del mondo intorno a noi.



Gli indici MathUp: qualche commento III - 3

Come si è proposta la geometria 3d?

- l'**osservazione**:
  - per descrivere (linguaggio!); per rappresentare; per riconoscere fatti e proprietà;
- il **volume**:
  - volume di prismi (e cilindri); volume di piramidi (e coni); volume e similitudine;
- la **sfera**:
  - il volume della sfera; la superficie della sfera; quanto è tonda la sfera (carte geografiche)
- la geometria per **contare** (e non solo misurare):
  - la relazione di Eulero
- **regolarità** e **simmetria**:
  - poliedri regolari
  - la simmetria del cubo.

Un esempio lungo (ripreso dall'intervento in plenaria)

Si è citato l'esempio dei cosiddetti numeri fissi. Sui libri di testo spesso compaiono come *deus ex machina*, senza nessun tentativo di giustificare la loro provenienza.

Ma è proprio così complicato darne ragione?

Poligono	Numero di lati	Angolo	Numero fisso f	Costante d'area φ
Triangolo equilatero	3	60°	0,289	0,433
Quadrato	4	90°	0,5	1
Pentagono	5	108°	0,688	1,720
Esagono	6	120°	0,866	2,598
Ettagono	7	≈ 128,571°	1,038	3,634
Ottagono	8	135°	1,207	4,828
Ennagono	9	140°	1,374	6,182
Decagono	10	144°	1,539	7,694
Dodecagono	12	150°	1,866	11,196

Certo, così si va dritti e veloci: ma cosa abbiamo insegnato?

cosa può restare a distanza di dieci anni?

Poliedri regolari

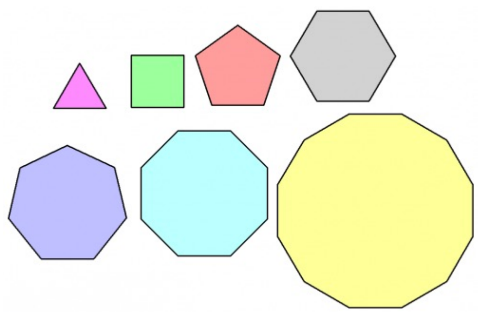
Area e volume si possono calcolare in maniera approssimata utilizzando i numeri fissi φ e σ

$A = \varphi \cdot l^2$ $\quad$ $V = \sigma \cdot l^3$

Poliedro	Tetraedro	Esaedro o cubo	Ottaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Numero fisso per l'area φ	1,73	6	3,464	20,64	8,66
Numero fisso per il volume σ	0,118	1	0,471	7,663	2,182

Una via lenta e tortuosa

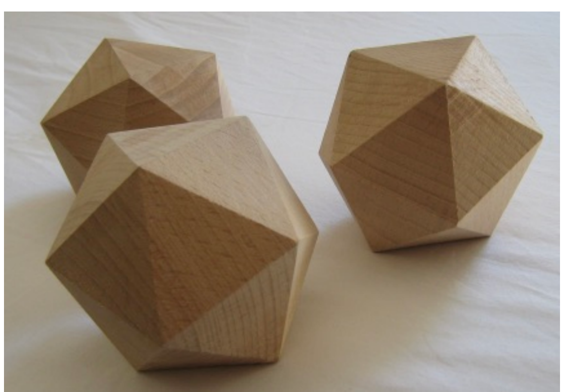
ma ricca di **significato**



I poligoni regolari con un dato numero di lati sono tutti simili fra loro;

quindi, i poligoni regolari con il lato di una certa lunghezza sono tutti *uguali* fra loro (isometrici): **quindi,** la loro area **dipende solo dalla** lunghezza del lato.

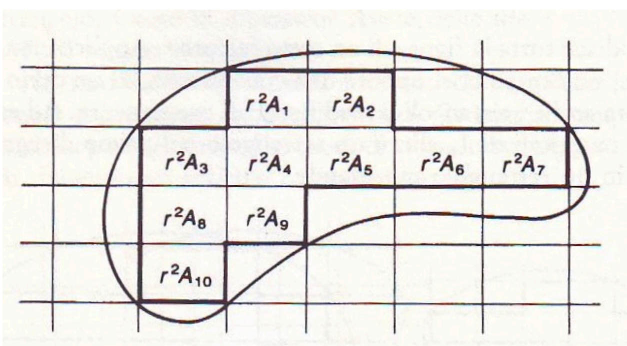
Questo è un passaggio concettuale grosso: **verso il concetto di funzione.**

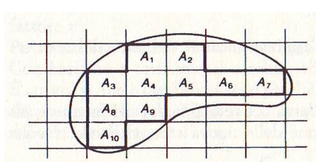


Anche i poliedri regolari dello stesso tipo sono tutti simili fra loro: (anche se non la conosco!) esiste una formula che dà il volume di un icosaedro in funzione della lunghezza del suo spigolo.

W la lentezza!

Il rapporto fra le aree di due figure piane simili è il quadrato del rapporto di similitudine: quindi la formula che dà l'area di un poligono regolare in funzione della lunghezza *l* del suo lato sarà $A=kl^2$, dove *k* è l'area del poligono regolare (di quel tipo) di lato 1.



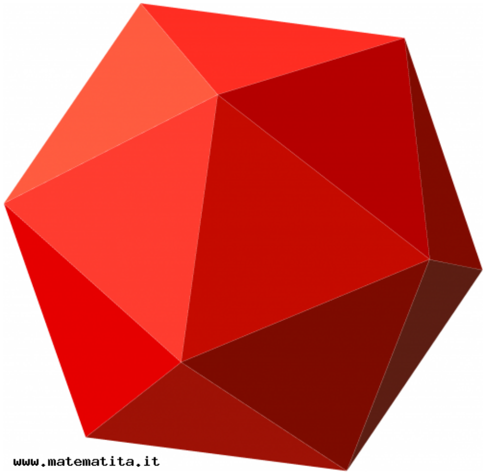


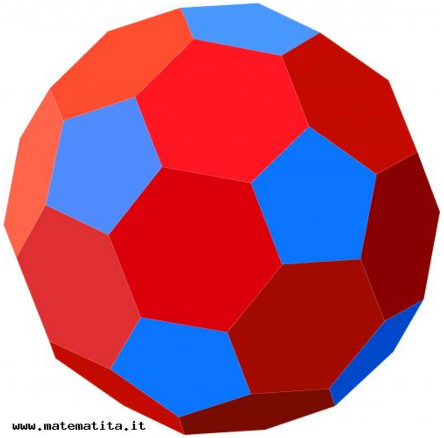
Perché?

- vale per i quadrati
- vale per i rettangoli
- ma allora vale anche per una figura qualsiasi: se si raddoppiano i lati dei rettangoli nel reticolato, il numero di rettangoli grandi all'interno della patata grande è uguale al numero dei rettangoli piccoli all'interno della patata piccola.

W la lentezza!

Allo stesso modo, il rapporto fra i volumi di due figure 3d simili è il cubo del rapporto di similitudine: quindi, la formula per il volume dell'icosaedro è del tipo $V=kl^3$, dove k è il volume dell'icosaedro di spigolo 1.





Anche i palloni da calcio sono tutti simili fra loro (ed è evidente a chi ha provato a costruirli: a volte l'osservazione passa **dalle mani!**). Anche la formula per il volume del pallone da calcio è del tipo $V=hl^3$, dove h è il volume del pallone da calcio di spigolo 1.

W la lentezza!

Anche tutte le circonferenze sono simili e tutte le sfere sono simili. Quindi le formule per la lunghezza l della circonferenza, l'area A del cerchio, la superficie S della sfera, il volume V della sfera dipendono solo dal raggio e saranno del tipo:

$l = k_1 r$ $\qquad$ $A = k_2 r^2$

$S = k_3 r^2$ $\qquad$ $V = k_4 r^3$

Occorre far vedere che questi quattro diversi *numeri fissi* sono legati fra loro (ed ecco che spunta π!):

$l = 2\pi r$ $\qquad$ $A = \pi r^2$

$S = 4\pi r^2$ $\qquad$ $V = (4/3)\pi r^3$

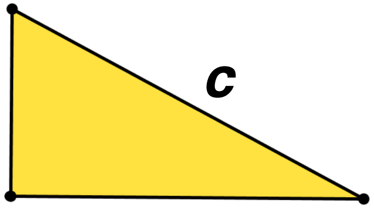
W la lentezza! Ritorno su Pitagora…

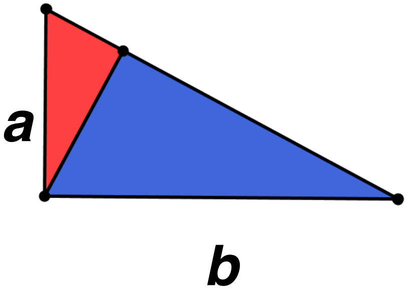
Fissato un triangolo rettangolo ***T*** di cateti a e b e ipotenusa c, prendiamo tutti i triangoli rettangoli simili a questo. Sono tutti simili, quindi la loro area dipende solo dalla lunghezza di uno dei lati, per esempio l'ipotenusa. La formula che dà l'area A di un triangolo simile a ***T*** e con ipotenusa i sarà del tipo $A = ki^2$, dove k dipende dalla forma del triangolo ***T***.

Ma allora il triangolo giallo ***T*** in figura viene diviso dall'altezza relativa all'ipotenusa nei due triangoli, rosso e blu, simili a ***T*** e le cui aree hanno per somma l'area di ***T***. Cioè:

$ka^2 + kb^2 = kc^2$,

ovvero il teorema di Pitagora $a^2 + b^2 = c^2$.





W la lentezza!

La strada lenta e tortuosa ha permesso di:

- stabilire delle **priorità** (non ci importa particolarmente stabilire la formula per l'area dell'ottagono regolare o per il volume dell'icosaedro regolare, ma ci importa capire quando può esistere una formula e quando no; ci importa essere in grado di leggere e interpretare una formula);
- mettere in evidenza le **idee** e i **legami** fra temi apparentemente lontani;
- riorganizzare gli argomenti intorno ad alcune **idee forti** (la misura, la simmetria, la similitudine), su cui tornare più e più volte (apprendimento a spirale…).

A proposito di rigore

La matematica può e deve insegnare il rigore del ragionamento. **Però:**

- rigore non è ripetere frasi corrette o presunte tali (senza che sia chiaro ai nostri allievi perché lo sono);
- il rigore deve diventare uno strumento che ci aiuta a ragionare meglio, non deve avere un effetto paralizzante;
- rigore vuol dire anche spirito critico rispetto alle incongruenze che si vedono in giro (nella pubblicità, su Internet, o magari anche sul libro di testo…!);

Tre tappe per l'apprendimento della matematica (a **qualsiasi età**):

- sperimentazione/manipolazione;
- verbalizzazione;
- astrazione.

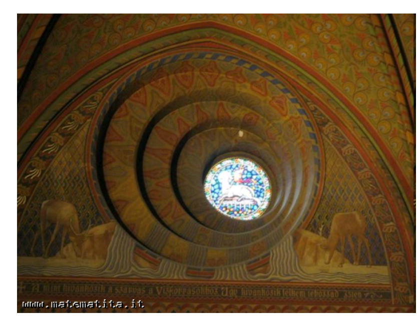
*La **verbalizzazione** è un nodo cruciale!*

A proposito di rigore: il linguaggio

Rigore vuol dire anche saper usare (a proposito) alcune parole della lingua italiana, come: *il* e *un*; *è necessario che, basta che*; *almeno* e *al più*; *esiste* e *ogni*; *e* e *o*; …

L'**osservazione** della realtà allo scopo di darne una **descrizione** e una **rappresentazione** geometrica può avere come sottoprodotto proprio l'attenzione all'**uso del linguaggio**: nel descrivere oggetti geometrici *un po' complicati* emerge *in maniera naturale* il significato e l'uso di queste parole. Si tratta di un aspetto fondamentale, e prezioso da molti punti di vista (per la matematica, ma non solo per la matematica; anche per la lingua e anche per altre materie).

… e siccome il mondo è vario, si trovano oggetti che sono *un po' complicati* per tutti i livelli…



La capacità di studiare, comprendere e impadronirsi degli argomenti in ambito matematico è simile, sotto certi aspetti, al saper nuotare o andare in bicicletta, due abilità che non possono essere raggiunte stando fermi.

H.S.M. Coxeter (1907-2003)

Grazie dell'attenzione!